Exercice 2

1.) $$\int_0^1 \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = 1$$

donc $$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{c} \exp\left(-|x-y| \right) dx\, dy = 1$$

donc

$$c = \int_0^1 \int_0^1 \exp\left(-|x-y| \right) dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \exp\left(-|x-y| \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^x e^{-(x-y)} dy + \int_x^1 e^{-(y-x)} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(e^{-x} \int_0^x e^{y} dy + e^{x} \int_x^1 e^{-y} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(e^{-x}\left[e^{x}-1\right] + e^{x}\left[-e^{-1}+e^{-x}\right]\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(1 - e^{-x} - e^{x-1} + 1\right) dx$$

$$= 2 - \int_0^1 e^{-x} + e^{x-1}\, dx$$

$$= 2 - \left[-e^{-x} + e^{x-1}\right]_0^1$$

$$= 2 - \left[-e^{-1} + 1 + 1 - e^{-1}\right]$$

$$= \frac{2}{e}$$

$$\boxed{c = \frac{2}{e}}$$

2.) $$f_X(x) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\, dy$$

$$= \frac{1}{c}\int_0^1 e^{-|x-y|}\, dy$$

$$= \frac{e}{2}\int_0^x e^{-(x-y)}\,dy + \frac{e}{2}\int_x^1 e^{-(y-x)}\,dy$$

$$= \frac{e}{2}\, e^{-x}\int_0^x e^{y}\,dy + \frac{e}{2}\, e^{x}\int_x^1 e^{-y}$$

$$= \frac{e}{2} e^{-x}\left(e^{x}-1\right) + \frac{e}{2} e^{x}\left(-e^{-1}+e^{-x}\right)$$

$$= \frac{e}{2} - \frac{e}{2} e^{-x} + \frac{e}{2} - \frac{e}{2} e^{x-1}$$

$$= e - \frac{e}{2}\left(e^{-x} + e^{x-1}\right)$$

$$\boxed{p_X(x) = e - \frac{e}{2}\left(e^{-x} + e^{x-1}\right)}$$

3.) $$p_{Y|X}(y|x) = \frac{\frac{e}{2} e^{-|x-y|}}{e - \frac{e}{2}\left(e^{-x} + e^{x-1}\right)}$$

4.)

$$p_{Y|X}(y|1) = \frac{\frac{e}{2} e^{-(1-y)}}{e - \frac{e}{2}(e^{-1}+1)}$$

$$= \frac{e^{y}}{2\left(e - \frac{1}{2} - \frac{e}{2}\right)}$$

$$= \frac{e^{y}}{2\left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{e^{y}}{e-1}$$

$$E(Y \mid X=1) = \int_0^1 y \frac{e^{y}}{e-1} dy = \frac{1}{e-1}\left(\left[y e^{y}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{y} dy\right)$$

$$= \frac{1}{e-1}\left(e \quad - e + 1\right)$$

$$= \frac{1}{e-1} \approx 0.58$$

5.) $\operatorname{Var}(Y|X=1) = E(Y^2|X=1) - \left(\frac{1}{e-1}\right)^2$

$$E(Y^2|X=1) = \int_0^1 y^2 \frac{e^y}{e-1}\, dy$$

$$= \frac{1}{e-1} \left\{ \left[y^2 e^y \right]_0^1 - \int_0^1 2y e^y \, dy \right\}$$

$$= \frac{1}{e-1} \left\{ e - \left[\left[2y e^y \right]_0^1 - \int_0^1 2 e^y \, dy \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{e-1} \left\{ e - \left[2e - 2e + 2 \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{e-1} \left\{ e - 2 \right\}$$

$$= \frac{e-2}{e-1}$$

$$\operatorname{Var}(Y \mid X=1) = \frac{e-2}{e-1} - \left(\frac{1}{e-1}\right)^2$$

$$= \frac{(e-2)(e-1) - 1}{(e-1)^2}$$

$$= \frac{e^2 - 3e + 1}{(e-1)^2}$$

$$\approx 0.08$$

6) $$P\left(Y \geq \tfrac{1}{2} \mid X=1\right) = \int_{1/2}^{1} \frac{e^y}{e-1}\, dy$$

$$= \frac{e - \sqrt{e}}{e-1}$$

$$\approx 0.62$$

TD 1
Correction

Exercice 3

1. On utilise l'indépendance.

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times \cdots \times P(X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}.$$

2. La log-vraisemblance s'écrit donc

$$-n\lambda + \log(\lambda) \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \log(x_i!)$$

On cherche les points critiques par rapport λ

$$\begin{aligned} & -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \end{aligned}$$

C'est bien un maximum car la log-vraissemblance tend vers $-\infty$ lorsque $\lambda \to +\infty$ donc elle atteint un maximum (raisonnement de cours de math analyse). Le seul maximiseur possible est le λ précédent car il annule la dérivée. Dans le cas où $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, on voit séparément que $\lambda = 0$ est le maximiseur. Ainsi l'estimateur $\widehat{\lambda}_{\mathrm{ML}}$ sur notre échantillon est

$$\widehat{\lambda}_{\mathrm{ML}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Exercice 4

1. Par indépendance la densité jointe est le produit des densités individuelles et donc, la densité de $(X_1, \dots, X_n)$ en $(x_1, \dots, x_n)$ s'écrit ici

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{t} \mathbb{1} [x_i \in [0,t]] \\ & = \frac{1}{t^n} \mathbb{1} [0 \leq \min x_i \leq \max x_i \leq t] \,. \end{aligned}$$

2. Cette fonction n'est pas dérivable par rapport à t ! Il est cependant possible d'identifier son maximum par rapport à t. Pour $x_1, \dots, x_n$ fixés, la vraisemblance vaut 0 tant que $t < \max x_i$, puis se comporte comme $\frac{1}{t^n}$. Elle est donc positive et décroissante sur l'intervalle $[\max x_i, +\infty[$. En d'autres termes, la vraisemblance est maximisée pour $t = \max x_i$ et

$$\widehat{t}_{\mathrm{ML}} = \max x_i \,.$$

3. Pour $i = 1, \dots, n$, presque surement $X_i \in [t, t+1]$. Donc presque surement : pour $i = 1, \dots, n$ $X_i \in [t, t+1]$. Donc presque surement $\min X_i \geq t$ et $\max X_i \leq t+1$ donc presque surement $\max X_i \leq \min X_i + 1$.

4. On utilise l'indépendance, donc la densité de $(X_1, \ldots, X_n)$ en $x_1, \ldots, x_n$ vaut

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{x_i \in [t, t+1]} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{t \leq x_i, t \geq x_i - 1} = \mathbf{1}_{t \in [\max x_i - 1, \min x_i]}.$$

5. La vraissemblance ne prend que 2 valeurs possibles ! Ces valeurs sont 0 et 1. Donc tout les t qui atteignent la valeur 1 maximisent la vraissemblance. Donc l'ensemble des maximiseurs est $[\max x_i - 1, \min x_i]$.

Exercice 5

$$\begin{aligned}
P(\text{malade} \mid \text{positif}) &= \frac{P(\text{malade et positif})}{P(\text{positif})} \\
&= \frac{P(\text{malade})P(\text{positif} \mid \text{malade})}{P(\text{ positif } \mid \text{malade})P(\text{malade}) + P(\text{ positif } \mid \text{sain})P(\text{sain})} \\
&= \frac{\frac{1}{1000}\frac{99}{100}}{\frac{99}{100}\frac{1}{1000} + \frac{2}{1000}\frac{999}{1000}} \\
&= \frac{99}{99 + 0.2 \times 999} \\
&\approx 0.33.
\end{aligned}$$