M2RI Statistiques Asymptotiques Leçon 1 : Vecteur aléatoires 1

#teaching

I. Définitions

Soit $X = (X_1, \dots, X_k)$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^k$. On définit sa fonction de répartition

$$F_X : \mathbb{R}^k \longrightarrow [0,1]$$
$$(x_1, \dots, x_k) \longmapsto \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k)$$

Définition : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une séquence de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^k$, et X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^k$.

On dit que (X_n) converge vers X

- En distribution si $F_{X_n}(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} F_X(x)$ $\forall x$ point de continuité de $F_X(\cdot)$

  notation : $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}, d} X$ (parfois $X_n \rightsquigarrow X$)

- En probabilité si $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\|X_n - X\| \geq \varepsilon) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

  notation : $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p, \mathbb{P}} X$

- Presque sûrement si $\mathbb{P}(\|X_n - X\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0) = 1$

  notation : $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{a.s, p.s} X$

- Dans L^p si $\mathbb{E}(\|X_n - X\|^p) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Remarque : La convergence en loi ne nécessite pas que toutes les quantités soient définies sur le même espace probabilisé.

II Characterisations équivalentes de la convergence en loi

Théorème du Portemanteau

Les points suivants sont équivalents :

(i) $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} X$

(ii) $\mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$ $\forall f$ continue et bornée.

(iii) $\mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$ $\forall f$ Lipschitz et bornée

(iv) $\liminf_n \mathbb{E}(f(X_n)) \geq \mathbb{E}(f(X))$ $\forall f \geq 0$ et continue

(v) $\liminf_n \mathbb{P}(X_n \in O) \geq \mathbb{P}(X \in O)$ $\forall O$ ouvert

(vi) $\limsup_n \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F)$ $\forall F$ fermé

(vii) $\mathbb{P}(X_n \in B) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{P}(X \in B)$ $\forall$ borélien B tq $\mathbb{P}(X \in \delta B) = 0$

Preuve Il s'agit d'une preuve simplifiée, pour voir la preuve complète, voir van der Vaart.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons $F_X(\cdot)$ continue partout. Dans ce cas, $\mathbb{P}(X_n \in I) \to \mathbb{P}(X \in I)$ pour tout rectangle I.

En effet, le cas $I = \{x \text{ tq } a < x \leq b\}$ est immédiat.
Il reste à regarder les cas où un bord gauche est fermé, et lorsqu'un bord droit est ouvert.
Dans le cas d'un bord gauche fermé (mêmes idées pour le reste).

$$\mathbb{P}(a < X_n \leq b) \leq \mathbb{P}(a \leq X_n \leq b) \leq \mathbb{P}\left(a - \frac{1}{2^p} < X_n \leq b\right)$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{P}(a < X_n \leq b) & & \mathbb{P}\left(a - \frac{1}{2^p} < X_n \leq b\right) \\
\| & & \| \\
F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a) & & F_{X_n}(b) - F_{X_n}\left(a - \frac{1}{2^p}\right) \\
\downarrow \; n \to +\infty \; \downarrow & & \downarrow \; n \to +\infty \; \downarrow \\
F_X(b) - F_X(a) & & F_X(b) - F_X\left(a - \frac{1}{2^p}\right) \\
\| & & \|
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(a < X \leq b) & & \mathbb{P}\left(a - \frac{1}{2^p} < X \leq b\right) \\ \| & \xleftarrow{\text{Continuité de } F_X} \quad \xrightarrow{} & \downarrow p \to +\infty \\ \mathbb{P}(a \leq X \leq b) & & \mathbb{P}(a \leq X \leq b) \end{array}$$

Fixons I_ε un rectangle compact tel que $\mathbb{P}(X \notin I_\varepsilon) \leq \varepsilon$
Soit f une fonction continue bornée. Elle est alors uniformément continue sur I_ε qui est compact.
On découpe I_ε en petits rectangles $R_1, \dots, R_N$ tels que f varie au plus de ε sur chaque rectangle, et qui forment une partition de I_ε.

Posons, $\forall x$, $\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{R_i}(x) \times \left(\inf_{x \in R_i} f(x) \right)$

En particulier, $\forall x$, $|\hat{f}(x) - f(x)| \leq \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus I_\varepsilon}(x) \|f\|_\infty + \varepsilon$

<u>Enfin</u>, $|\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f(X))|$

$$\leq |\mathbb{E} f(X_n) - \mathbb{E} \hat{f}(X_n)| + |\mathbb{E} \hat{f}(X_n) - \mathbb{E} \hat{f}(X)| + |\mathbb{E} \hat{f}(X) - \mathbb{E} f(X)|$$

$$\leq \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus I_\varepsilon}(X_n) \|f\|_\infty + \varepsilon \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varepsilon(1 + \|f\|_\infty)$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} |\mathbb{P}(X_n \in R_i) - \mathbb{P}(X \in R_i)| \left| \inf_{x \in R_i} f(x) \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$+ \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus I_\varepsilon}(X) \|f\|_\infty + \varepsilon \leq \varepsilon(1 + \|f\|_\infty) \quad .$$

Dans le cas général où F_X n'est pas continue partout, on peut remarquer de discontinuité. Ne pas y prendre la frontière de nos rectangles.

<u>(ii) => (iii)</u> Lipschitz => continu, donc évident.

<u>(iii) => (v)</u> Il est possible d'approcher $\mathbb{1}_O$ aussi proche qu'on veut avec une fonction Lipschitz :

$$f_L(x) = L \operatorname{dist}(\mathbb{R}^d \setminus O, x) \wedge 1$$

$(v) \Rightarrow (vi)$ Passer par le complémentaire qui est ouvert.

$(v)+(vi) \Rightarrow (vii)$

$$\mathbb{P}(X\in \mathring{B}) \underset{(v)}{\le} \liminf \mathbb{P}(X_n\in \mathring{B}) \le \limsup \mathbb{P}(X_n\in\bar{B}) \underset{(vi)}{\le} \mathbb{P}(X\in\bar{B})$$

Or, $\mathbb{P}(X\in\bar{B}) = \mathbb{P}(X\in\mathring{B}) + \underbrace{\mathbb{P}(X\in \partial B)}_{=0 \text{ par hypothèse}}$

Il y a donc égalité entre tous les termes et comme $\mathbb{P}(X_n\in B)$ et $\mathbb{P}(X\in B)$ sont aussi pris en sandwich là dedans, il en est de même pour eux.

$(vii) \Rightarrow (i)$ Regarder les ensembles de la forme $(-\infty, x]$.

$(ii) \Leftrightarrow (iv)$ $(\Rightarrow)$ Considérer $f_M = f\wedge M$ puis $M\to+\infty$ avec convergence dominée.
$(\Leftarrow)$ Appliquer à f et à $-f$.

Exercices:

- Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ n'entraîne pas nécessairement $X_n - X \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$.

Solution: Prendre $U\sim \mathrm{Unif}([0,1])$, $X_n = U\ \forall n$ et $X=-U$. □

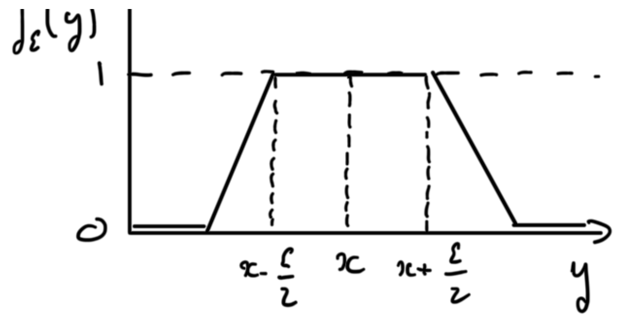
Remarque: Les mêmes idées montrent que si X et Y ont la même loi, on n'a pas nécessairement XZ et YZ qui ont la même loi.

- Montrer l'équivalence $x_n\to x$ ssi $\delta_{x_n}\to\delta_x$.

$(\Rightarrow)$ Soit f continue bornée. $\mathbb{E}_{X\sim\delta_{x_n}}(f(X)) = f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) = \mathbb{E}_{X\sim\delta_x}(f(X))$

continuité

$(\Leftarrow)$ On veut construire une fonction de test qui "isole" x sur un voisinage.
⚠ Cette fonction doit être continue bornée pour pouvoir appliquer le théorème du portemanteau.



Si $\delta_{x_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \delta_x$, Alors $\mathbb{E}_{X\sim\delta_{x_n}}\left(f_\varepsilon(X)\right) \longrightarrow \mathbb{E}_{X\sim\delta}\left(f_\varepsilon(X)\right)$ (Portemanteau)

et donc $f_\varepsilon(x_n) \longrightarrow f_\varepsilon(x) = 1$

en particulier, il existe $N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $f_\varepsilon(x_n) > 0$

donc, $\exists N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $|x - x_n| \leq \varepsilon$ $\square$

III. Transformée de Fourier

Définition : Si X est un vecteur aléatoire, on appelle la transformée de Fourier de sa loi sa fonction caractéristique (notée ϕ_X) définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}^k, \quad \phi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{it.X}\right) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{it.x}\, d\mathbb{P}_X(x)$$

Propositions : Nous avons :

(i) $\phi_X = \phi_Y \iff \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y \iff X \sim Y$ (X et Y ont même loi).

(ii) $\forall t$, $|\phi_X(t)| \leq 1$ et $\phi_X(0) = 1$.

(iii) ϕ_X est uniformément continue.

(iv) $\phi_{AX+B}(t) = \phi_X(A^T t)\, e^{ib.t}$ $\forall t$.

(v) $\phi_{-X}(t) = \phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)}$ $\forall t$.

$\hookrightarrow$ X est symétrique ssi ϕ_X est à valeurs réelles.

(vi) Si $\mathbb{E}(|X|^p) < +\infty$, alors ϕ_X est C^p. De plus,

$$\forall m \in \{1, \dots, p\}, \quad \phi_X^{(m)}(t) = i^m \, \mathbb{E}(X^m e^{it.X}) .$$

(vii) La réciproque de (vi) est fausse, mais on a quand même :

Si ϕ_X admet une dérivée d'ordre <u>pair</u> en 0, alors X a des moments (absolus) finis jusqu'au même ordre.

(viii) Si X admet une densité par rapport à Lebesgue, alors $\phi_X(t) \underset{|t| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ix) Si $\phi_X \in L^1$, X admet une densité f continue et bornée, et par la formule d'inversion de Fourier,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-it.x} \phi_X(t) \, dt .$$

(x) X et Y sont indépendantes ssi $\phi_{(X,Y)}(s,t) = \phi_X(s) \phi_Y(t) \quad \forall (s,t)$.

(xi) Si X et Y sont indépendantes,

$$\mathbb{P}_{X+Y} = \mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y \quad \text{et} \quad \phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y .$$

<u>Preuve</u> :

<u>(i)</u> ($\Leftarrow$) Immédiat

($\Rightarrow$) Technique, voir Garrard 2009

<u>(ii)</u> $\phi_X(0) = \mathbb{E}(1) = 1$. De plus, $\forall t$, $|\phi_X(t)| = \left|\mathbb{E}\left(e^{it.X}\right)\right| \leq \mathbb{E}\left(\left|e^{it.X}\right|\right) \leq \mathbb{E}(1) = 1$

<u>(iii)</u> Soit $\varepsilon > 0$ et $M > 0$ tq $\mathbb{P}(X \notin B(0,M)) \leq \varepsilon$.

$$|\phi_X(t_1) - \phi_X(t_2)| \leq \int_{B(0,M)} |e^{ix.t_1} - e^{ix.t_2}| \, d\mathbb{P}_X(x) + 2\mathbb{P}(X \notin B(0,M))$$

Inégalité des accroissements finis $\Rightarrow \left|e^{iX.t_1} - e^{iX.t_2}\right| \leq \|t_1 - t_2\| \|X\|$

donc : $|\phi_X(t_1) - \phi_X(t_2)| \leq C \|t_1 - t_2\| + 2\varepsilon$, d'où le résultat.

(iv) et (v) Immédiat

(vi) Théorèmes d'interversion de dérivée et intégrale.

(vii) Traitons le cas $m = 1$, les cas $m > 1$ s'obtiennent de la même manière.

On a $\displaystyle \phi_X''(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\phi_X(t) + \phi_X(-t) - 2\phi(0)}{t^2}$.

Or, $\phi(0) = 1$ et $\phi_X(t) + \phi_X(-t) = 2\,\mathrm{Re}(\phi_X(t)) = 2\,\mathbb{E}(\cos(tX))$.

donc $\displaystyle \phi_X''(0) = -2 \lim_{t \to 0} \mathbb{E}\left(\frac{1 - \cos(tX)}{t^2}\right)$.

de plus, $\displaystyle \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos(tX)}{t^2} = \frac{1}{2} X^2$

D'où, $\displaystyle \int X^2 \, d\mathbb{P}_X = \mathbb{E}_X\left(2 \liminf \frac{1 - \cos(t_n X)}{t_n^2}\right)$

$\displaystyle \underset{\text{Fatou}}{\leq} 2 \liminf \mathbb{E}_X \frac{1 - \cos(t_n X)}{t_n^2}$

$< +\infty$.

(viii) Si X a une densité, il s'agit du théorème de Riemann-Lebesgue pour les fonctions de L^1.

(ix) Technique, voir Gouraud 2009.

(x) ($\Rightarrow$) Fubini

($\Leftarrow$) Conséquence de (i)

(xi) Fubini.

Exemple : Calculer la transformée de Fourier de la loi normale centrée réduite sur $\mathbb{R}$ de densité $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, et en déduire la transformée de Fourier d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ sur $\mathbb{R}^d$ de densité

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} \|x-\mu\|^2_{\Sigma^{-1}}\right).$$

Supposons $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. $\phi_X(t) = \int e^{ixt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

• Méthode n°1 : Par une équation différentielle

D'après les théorèmes d'interversion intégration-dérivation,

$$\phi_X'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int ix e^{ixt} e^{-x^2/2} dx$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int \underbrace{e^{ixt}}_{\text{facile à dériver}} \underbrace{x e^{-x^2/2}}_{\text{facile à intégrer}} dx$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int -it\, e^{ixt} e^{-x^2/2} dx \quad \text{(Vérifier les bords de l'IPP)}$$

$$= -t\, \phi_X(t)$$

D'où $\underline{\Phi_X'(t) = t\, \Phi_X(t)}$ $\Rightarrow \Phi_X(t) = \Phi_X(0) e^{-\frac{x^2}{2}}$

et $\Phi_X(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int e^{-u^2} du}_{= \sqrt{\pi} \text{ (Intégrale de Gauss)}} = 1$.

d'où $\underline{\Phi_X(t) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$.

• Méthode 2 : Par holomorphie

Posons $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{zx} e^{-x^2/2} \, dx$ $\quad \left(\text{donc } \Phi_X(t) = f(it) \right)$

Par holomorphie sous le signe intégral, f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

De plus, pour $z \in \mathbb{R}$,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{z^2}{2}} \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{z^2/2} \underbrace{\int e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2} dx}_{= \sqrt{2\pi} \text{ (Intégrale de Gauss)}}$$

$$= e^{z^2/2}$$

En particulier, f et $z \mapsto e^{z^2/2}$ coïncident sur $\mathbb{R}$, et en raison du principe du prolongement analytique,

$$\underline{f(z) = e^{z^2/2} \quad \forall z \in \mathbb{C}}$$

d'où $\underline{\phi_X(t) = e^{-t^2/2} \quad \forall t \in \mathbb{R}}$

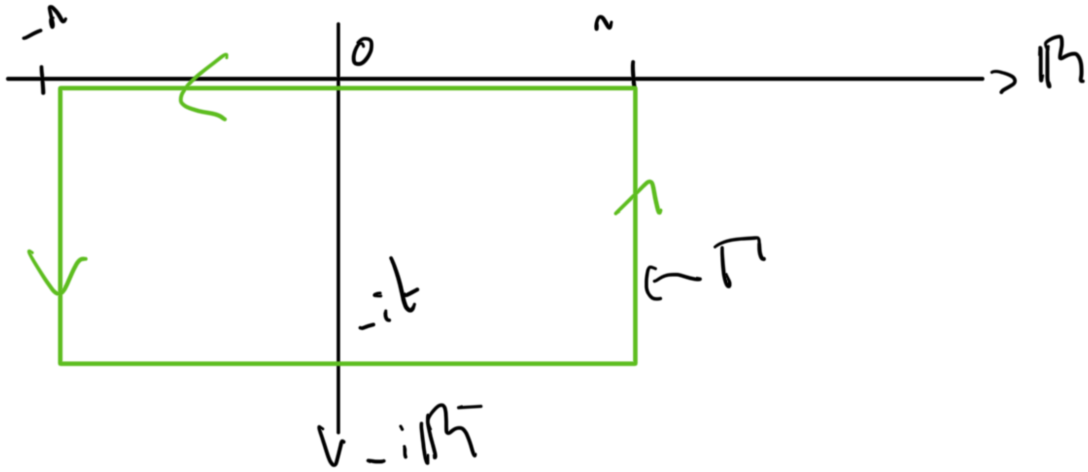
• Méthode 3 : Formule de de Cauchy

Même idée qu'avant : Se ramener à $\mathbb{R}$ où l'intégration est facile via l'intégrale de Gauss.

Comme avant, $\Phi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \underbrace{\int e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{it}{\sqrt{2}}\right)^2} dx}_{I(t)}$

et notons $I_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{it}{\sqrt{2}}\right)^2} dx$

$\sqrt{\pi})_{-1}$ notons $f : u \mapsto e^{-(u/\sqrt{2})^2}$



Comme f est holomorphe, la formule de Cauchy donne :

$$0 = \int_\Gamma f(u)\,du = \underbrace{\int_n^{-n} f(u)\,du}_{(1)} + \underbrace{\int_{-n}^{-n-it} f(u)\,du}_{(2)} + \underbrace{\int_{-n-it}^{n-it} f(u)\,du}_{(3)} + \underbrace{\int_{n-it}^{n} f(u)\,du}_{(4)}$$

$$(1) = \int_n^{-n} e^{-x^2/2}\,dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\sqrt{2\pi}$$

$$(3) = I_n(t)$$

$$(2) = \int_0^t e^{-\left(\frac{-n}{\sqrt{2}} - \frac{it'}{\sqrt{2}}\right)^2} (-i)\,dt' \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{(convergence dominée)}$$

$$(4) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{(convergence dominée)}$$

Donc : $I_n(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{2\pi}$

De plus, $I_n(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} I(t)$ (convergence dominée)

donc : $\phi(t) = e^{-t^2/2}$

Extension au cas multidimensionnel

$X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$. Comme $\Sigma \succcurlyeq 0$, $\exists\, O$ matrice orthogonale et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_d \geq 0$ tq $\Sigma = P^T D P$.

En notant $\sqrt{D} = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d})$, on a $\Sigma = (\sqrt{D}P)^T(\sqrt{D}P)$.

Donc si $X' \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ alors $(\sqrt{D}P)^T X' \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$.

On s'intéresse donc au cas $\Sigma = I_d$ et le cas général est traité par produit et somme pour la moyenne.

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, I_d)$. $\Phi_X(t) = \prod_{i=1}^{d} \Phi_{X_i}(t_i)$ (règle de produit)

$$= e^{-t_i^2/2}$$

d'où $\underline{\phi_X(t) = e^{-\frac{1}{2}\|t\|^2}}$

Enfin, par règle de produits et de sommes, si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$,

$$\underline{\phi_X(t) = e^{it^T\mu - \frac{1}{2}t^T\Sigma t}}$$

IV. Lien entre convergence en loi et convergence de la transformée de Fourier

Définition : Une famille $(X_a)_{a\in A}$ de vecteurs aléatoires est dite tendue (uniformly tight en anglais) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \geq 0 \text{ tq } \sup_{a\in A} \mathbb{P}(\|X_a\| > M) \leq \varepsilon.$$

Théorème (Prokhorov) :

(i) Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, Alors $(X_n)_n$ est tendue

(ii) Si $(X_n)_n$ est tendue, alors il existe un vecteur aléatoire $\hat{X}$ tel que $X_{\varphi(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \hat{X}$ pour une extractrice φ.

Preuve

(i) Soit M tq $\mathbb{P}(\|X\| \geq M) < \varepsilon$. D'après le théorème du portemanteau,

$$\limsup \mathbb{P}(\|X_n\| \geq M) \leq \mathbb{P}(\|X\| \geq M) < \varepsilon.$$

Donc, il existe N tq $\mathbb{P}(\|X_n\| \geq M) < 2\varepsilon \quad \forall n \geq N$.

Donc, quitte à augmenter la valeur de M pour gérer les $n \leq N$ (qui sont finis),

$$\mathbb{P}(\|X_n\| \geq M) < 2\varepsilon \quad \forall n.$$

Donc, $(X_n)_n$ est tendue.

(ii) Lemme (Helly) : À partir de toute suite de fonctions de distribution $(F_n)_n$, il est possible de définir une fonction F à valeurs dans $[0,1]$ qui soit

(i) Croissante

(ii) Continue à droite

⚠ Cette fonction peut être impropre et ne pas vérifier $F(x) \to 1$ si $x \to +\infty$ et $F(x) \to 0$ si $x_i \to -\infty$ pour un i.

telle que $F_{\varphi(n)}(x) \to F(x)$ $\forall x$ point de continuité de F.

idée de la preuve : Extraction diagonale sur les points à coordonnées entières pour construire $\tilde{F}$, puis lissage par $F(x) = \inf_{q > x} \tilde{F}(q)$.

Voir van der Vaart ∎

D'après le lemme de Helly, la suite F_n converge simplement vers F dont la régularité est décrite dans le lemme de Helly. Il reste à prouver que F est propre.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite est tendue, $\exists M$ tq $\mathbb{P}(\|X_n\| > M) < \varepsilon$ $\forall n$.

Donc si x est un point de continuité de F t.q. $x_i > M$ $\forall i$

$$F(x) = \lim_n \underbrace{F_n(x)}_{\geqslant 1-\varepsilon \text{ APCR}} \geqslant 1-\varepsilon$$

De même, si $\exists\, i$ tq $x_i < M$, alors

$$F(x) = \lim_n \underbrace{F_n(x)}_{\leqslant \varepsilon \text{ APCR}} \leqslant \varepsilon$$

D'où : $F(x) \longrightarrow 1$ si $x \to +\infty$ et $F(x) \longrightarrow 0$ si $x_i \to 0$ pour un i.

Il s'agit donc d'une fonction de répartition propre ce qui conclut la preuve.

Théorème (Levy)

(i) Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, alors $\phi_{X_n}(t) \to \phi_X(t)\ \forall t \in \mathbb{R}^d$

(ii) Si $\exists\, \phi$ continue en 0 tq $\phi_{X_n}(t) \to \phi(t)\ \forall t$, alors ϕ est la fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire X tq
$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Preuve

(i) Conséquence immédiate par fonctions continues bornées de la convergence en loi.

(ii) Une suite tendue de variables aléatoires possédant au plus une valeur d'adhérence pour la convergence en distributions converge vers cette unique valeur d'adhérence.

Montrons que (X_n) possède au plus une valeur d'adhérence, nous montrerons ensuite qu'elle est tendue.

Soient φ_1, φ_2 deux extractrices, X, X' tels que

$$X_{\varphi_1(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad \text{et} \quad X_{\varphi_2(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X',$$

alors d'après (i),

$$\phi_{X_{\varphi_1(n)}}(t) \longrightarrow \phi_X(t)\ \forall t \text{ et } \phi_{X_{\varphi_2(n)}}(t) \to \phi_{X'}(t)\ \forall t.$$

Mais par unicité de la limite, $\forall t$, $\phi_X(t) = \phi_{X'}(t) = \phi(t)$.

Donc par injectivité de la transformée de Fourier, $X \overset{\mathcal{L}}{=} X'$.

Montrons maintenant que (X_n) est tendue.

Sans perte de généralités, supposons (X_n) scalaire.

$\sin(\delta x)$

$\forall x$ et $\delta > 0$, $\mu(|\delta x| > 2) \leq 2\left(1 - \frac{\ }{\delta x}\right) = \frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} (1-\cos tx)\,dt$

donc $\mathbb{P}\left(|X_n| > \frac{2}{\delta}\right) \leq \frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{Re}\left(1 - \mathbb{E}\left(e^{itX_n}\right)\right) dt$

$$\Big\downarrow \text{Convergence dominée}$$

$$\frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{Re}\left(1 - \phi_X(t)\right) dt$$

De plus, comme ϕ_X est continu en 0 et $\phi_X(0) = 1$, le terme de droite est aussi petit qu'on veut pour δ suffisament petit.
Donc (X_n) est tendue et le résultat suit.

Exemple (Loi faible des grands nombres)

$X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} X$, alors $\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n}_{=\overline{X_n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$ si ϕ_X est différentiable en 0 et $\phi_X'(0) = i\mu$.

↳ en effet, $\mathbb{E}\left(e^{i\overline{X_n}}\right) = \phi_X^n\left(\frac{t}{n}\right) = \left(1 + \frac{t}{n}i\mu + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$
$\longrightarrow e^{it\mu}$.

Remarque : Si $X \in L^1$, la convergence est même presque-sure
(Loi forte des grands nombres)

Exemple (Théorème central limite)

Si $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} X$ avec $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathbb{E}(X^2) = 1$, alors
$\sqrt{n}\,\overline{X_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.

↳ En effet $\mathbb{E}\left(e^{it\sqrt{n}\overline{X_n}}\right) = \phi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{t^2}{n}\mathbb{E}(X^2) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2$

$\frac{1}{2} t^2 \mathbb{E}(X^2)$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} e^{-\frac{1}{2} \cdots} \quad .$$