

Exercice n° 1:

$$X = \{A, T, G, C\}^N$$

$$p: (x_1, \dots, x_N), (y_1, \dots, y_N) \mapsto$$

$$\sum_{(t_1, t_2, t_3) \in \{A, T, G, C\}^N} \left(\prod_{i=0}^{N-3} \mathbb{1}(x_{i+1} = t_1, \dots) \right) \\ \left(\text{ // avec } y \right).$$

$$\text{Alors } p: (x_1, \dots, x_N), (y_1, \dots, y_N) \mapsto \sum_{\substack{(t_1, t_2, t_3) \\ \in \{A, T, G, C\}^N}} \phi_{t_1, t_2, t_3}(x) \times \phi_{t_1, t_2, t_3}(y)$$

$$= \langle \phi(x), \phi(y) \rangle_{\mathbb{R}}^{(4^3)}$$

$$\text{ou } \phi(z) = \begin{pmatrix} \phi_{A,A,A}(z) \\ \phi_{A,A,T}(z) \\ \vdots \\ \phi_{C,C,C}(z) \end{pmatrix}.$$

• $X = \mathbb{R}, \forall x, y \in X, K(x, y) = \cos(x - y)$

$$\forall x, y, \cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(y) \\ \sin(y) \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{R}^2}$$

donc le noyau est symétrique positif.

• $X = \mathbb{R}$, $K: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui est symétrique.

C'est faux en général.

par exemple $K: \begin{cases} 0,0 \mapsto 0 \\ 1,1 \mapsto 0 \\ 0,1 \mapsto 1 \\ 1,0 \mapsto 1 \end{cases}$

$$\text{Alors } \begin{pmatrix} K(0,0) & K(0,1) \\ K(1,0) & K(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut -1 . Cette matrice symétrique a donc au moins une valeur propre négative. Elle n'est donc pas positive.

• $X = \mathbb{R}_2(-1,1)$, $\forall x,y \in X$, $K(x,y) = 1/(1-xy)$

$$\forall x,y \in (-1,1), K(x,y) = \frac{1}{1-xy} = \sum_{n=0}^{+\infty} (xy)^n$$

Or, $x,y \mapsto xy = \langle x,y \rangle_{\mathbb{R}}$ est symétrique positif
 donc $x,y \mapsto (xy)^n$ est symétrique positif $\forall n \geq 1$ par règles
 de produit
 et aussi, $x,y \mapsto 1$ est symétrique positif (immédiat)

donc, par passage à la limite simple,

$$x, y \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} (x_i y_i)^{\wedge} \text{ est symétrique positif.}$$

donc K est symétrique positif.

$$\bullet \quad X = \mathcal{T}, \quad \forall A, B \in X, \quad K(A, B) = P(A \cap B) - P(A)P(B)$$

Soit $A_1, \dots, A_n \in X, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j K(A_i, A_j) = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j (P(A_i \cap A_j) - P(A_i)P(A_j))$$

$$= \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j (E(\mathbb{1}_{A_i} \mathbb{1}_{A_j}) - E(\mathbb{1}_{A_i}) E(\mathbb{1}_{A_j}))$$

$$= \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j E(\mathbb{1}_{A_i} \mathbb{1}_{A_j}) - \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j E(\mathbb{1}_{A_i}) E(\mathbb{1}_{A_j})$$

$$= E\left(\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \mathbb{1}_{A_i} \mathbb{1}_{A_j}\right) - \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j E(\mathbb{1}_{A_i}) E(\mathbb{1}_{A_j})$$

$$= E\left(\left(\sum_i \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}\right)^2\right) - \left(E\left(\sum_i \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}\right)\right)^2$$

$$= \text{Var}\left(\sum_i \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}\right)$$

$$\geq 0.$$

Donc K est symétrique positif.

• $X = \mathbb{M}_+$, $\forall x, y \in X$, $K(x, y) = \min(x, y)$

$$\forall x, y \in \mathbb{M}_+, \min(x, y) = \int_{\mathbb{M}_+} \mathbb{1}_{[0, x]} \mathbb{1}_{[0, y]}$$

$$= \left\langle \mathbb{1}_{[0, x]}, \mathbb{1}_{[0, y]} \right\rangle_{L^2(\mathbb{M}_+)}$$

• $X = \mathbb{N}_*$, $\forall x, y \in X$, $K(x, y) = \text{pgcd}(x, y)$

Soit $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers énuméré par ordre croissant.

Alors, $\forall x, y$, $\text{pgcd}(x, y) =$

$$= p_1^{\min(v_{p_1}(x), v_{p_1}(y))} \times p_2^{\min(v_{p_2}(x), v_{p_2}(y))} \times \dots$$

d'après la question précédente et par composition à gauche,

$x, y \mapsto \min(v_p(x), v_p(y))$ est symétrique

positif pour tout nombre premier p .

donc, par passage à l'exponentielle (cf cours)

$x, y \mapsto p^{\min(v_p(x), v_p(y))}$ est symétrique positif pour tout nombre premier p .

donc, $\forall N, x, y \mapsto \prod_{i=1}^N \min(v_{p_i}(x), v_{p_i}(y))$ est symétrique positif (par produit).

donc par passage à la limite simple,

$x, y \mapsto \text{pgcd}(x, y)$ est symétrique positif.

$\bullet X = \mathbb{N}^*, \forall x, y \in X, K(x, y) = \frac{1}{\text{ppcm}(x, y)}$

$$\forall x, y \in X, \text{pgcd}(x, y) \text{ppcm}(x, y) = xy.$$

$$\text{Alors } \forall x, y \in X, \text{ppcm}(x, y) = \frac{\text{pgcd}(x, y)}{xy}.$$

or $x, y \mapsto \text{pgcd}(x, y)$ est symétrique positif d'après la question précédente.

Si nous prouvons que $x, y \mapsto \frac{1}{xy}$ est symétrique positif, nous aurons gagné.

$$\text{or, } \forall x, y \in X, \frac{1}{xy} = \left\langle \frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

ce qui conclut la preuve.

Exercice 2:

1) Soit $n \geq 1$, $x_1, \dots, x_n \in X$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j k(x_i, x_j) &= \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \langle \phi(x_i), \phi(x_j) \rangle \quad (\text{par définition}) \\ &= \left\langle \sum_i \alpha_i \phi(x_i), \sum_j \alpha_j \phi(x_j) \right\rangle \quad (\text{bilinearité}). \\ &= \left\| \sum_i \alpha_i \phi(x_i) \right\|^2 \quad (\text{définition de la norme}) \\ &\geq 0 \quad (\text{car carré toujours positif}). \end{aligned}$$

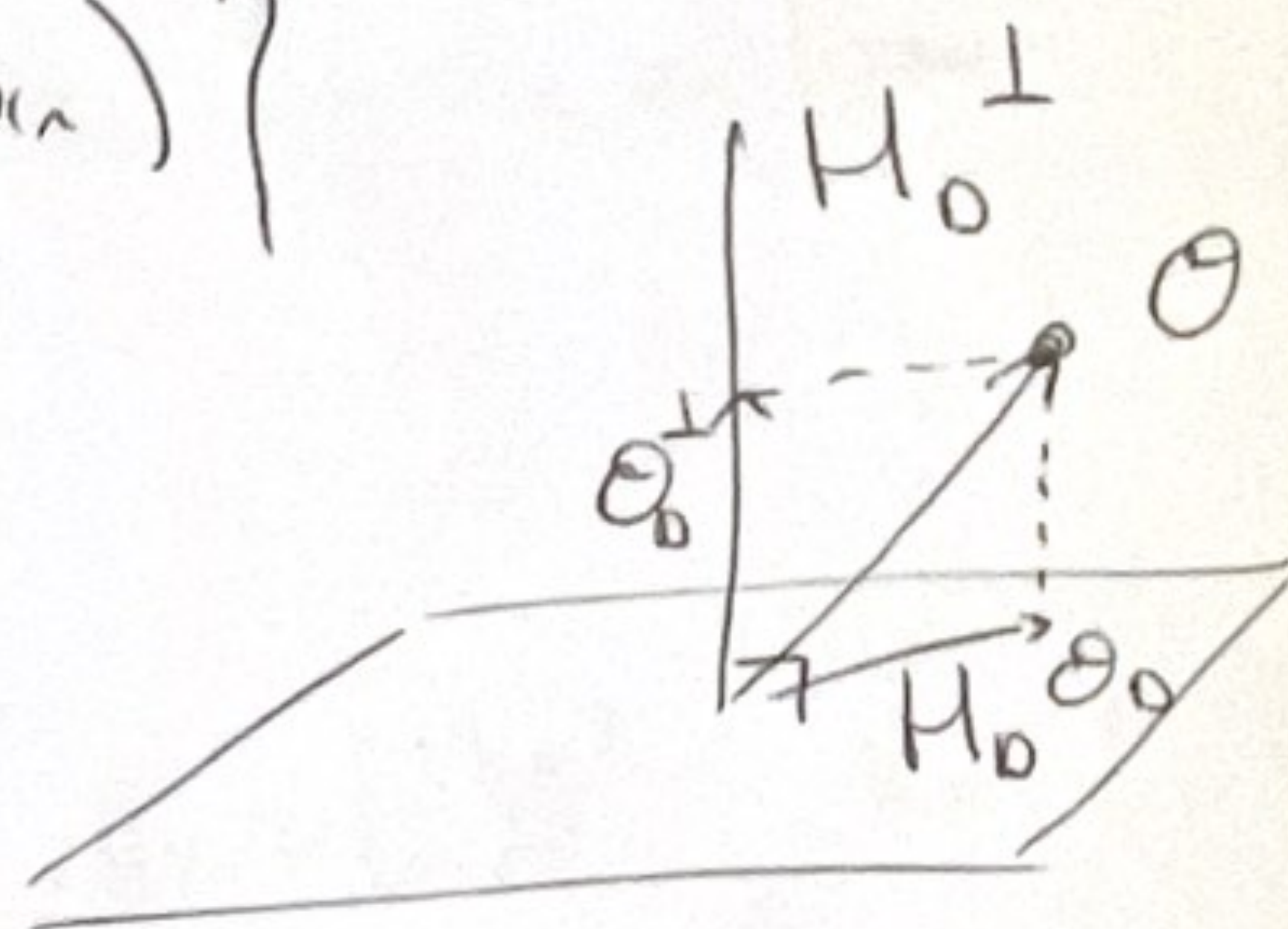
2) D'après le théorème d'Aronszajn, si k est un noyau symétrique positif, alors il existe un espace de Hilbert et $\phi: X \rightarrow H$ tel que

$$\forall x_1, x_2 \in X, k(x_1, x_2) = \langle \phi(x_1), \phi(x_2) \rangle.$$

Donc, si on a un noyau pas un produit scalaire et une famille ϕ n'est pas restreinte, il y a équivalence entre les deux.

3) Notons $H_0 = \text{Vect} \{ \phi(x_1), \dots, \phi(x_n) \}$

Soit $\theta \in H$, $\theta = \underset{\substack{\uparrow \\ H_0}}{\theta_0} + \underset{\substack{\uparrow \\ H_0^\perp}}{\theta_0^\perp}$



Notons $M_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(1 + e^{-y_i \langle \theta, \phi(x_i) \rangle}) + \|\theta\|^2$

Alors $M_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(1 + e^{-y_i \langle \theta_0 + \theta_0^\perp, \phi(x_i) \rangle}) + \|\theta_0 + \theta_0^\perp\|^2$
 $= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(1 + e^{\underbrace{-y_i \langle \theta_0, \phi(x_i) \rangle}_{\text{par linéarité}} + \underbrace{(\theta_0^\perp, \phi(x_i))}_{\text{par Pythagore}}}) + \underbrace{\|\theta_0\|^2}_{\text{par Pythagore}} + \underbrace{\|\theta_0^\perp\|^2}_{\text{par Pythagore}}$

or, $\forall i, \langle \theta_0^\perp, \phi(x_i) \rangle = 0$ car $\theta_0^\perp \in \text{Vect}(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n))^\perp$.

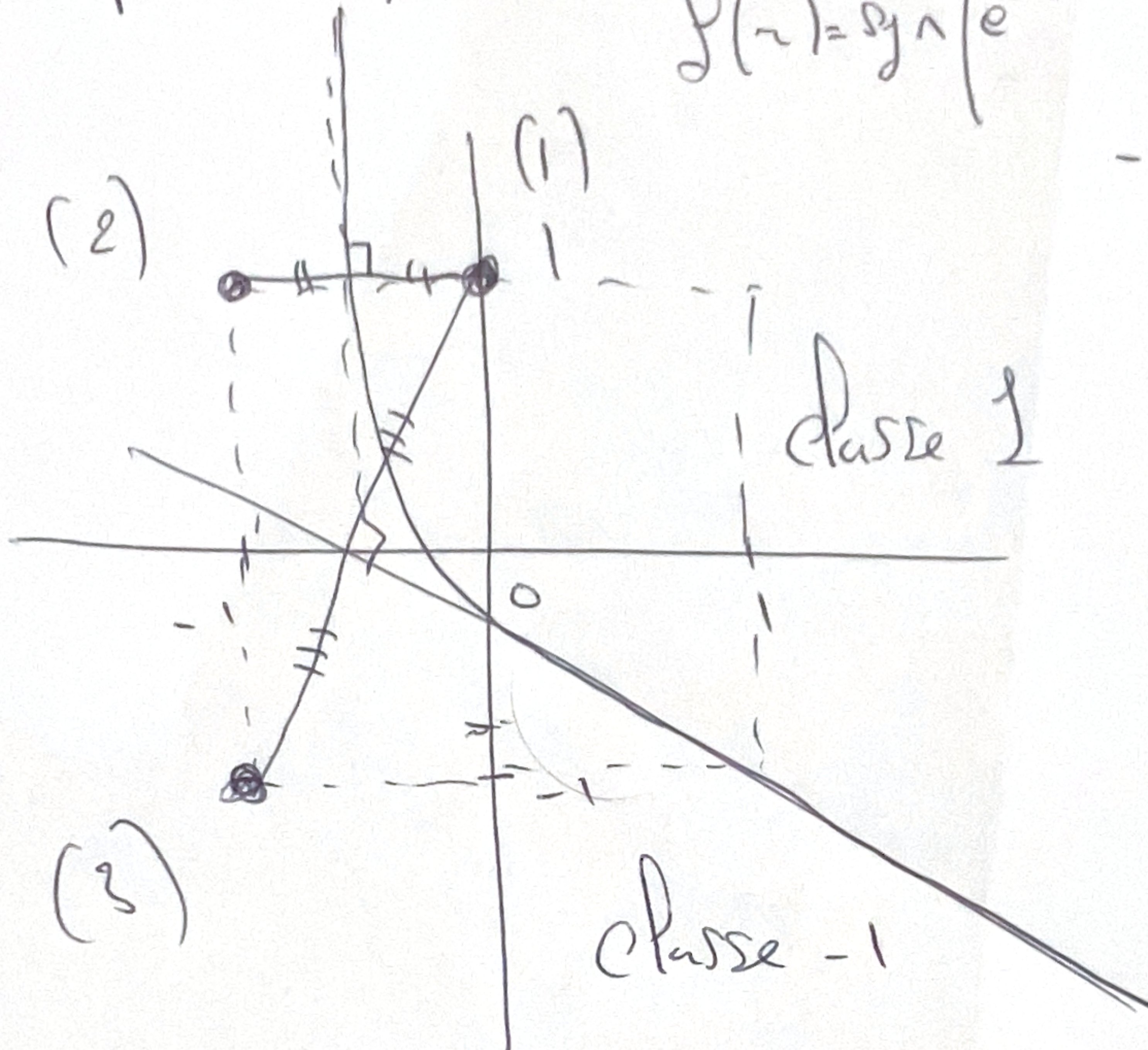
donc $M_n(\theta) = M_n(\theta_0) + \|\theta_0^\perp\|^2$

Une solution optimale (si elle existe) a donc une composante dans l'orthogonal de H_0 nulle. On peut se restreindre à chercher dans H_0 .

Sur H_3 , le problème est fortement convexe (grâce au terme $\lambda \|0\|^2$). Il admet donc une unique solution.

4) (noyau exponentiel)

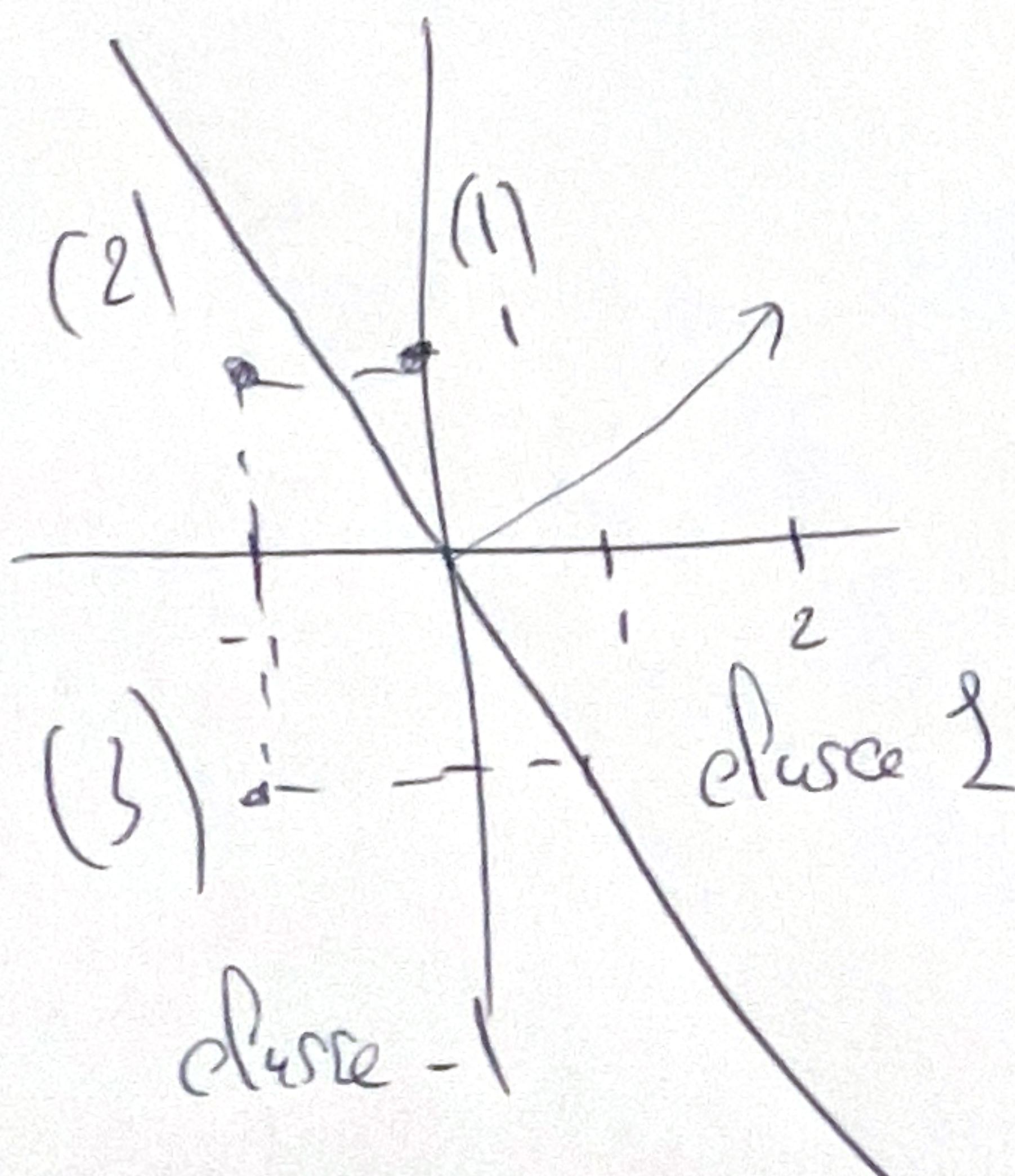
$$f(x) = \text{sgn} \left(e^{-\|x - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\|^2} - e^{-\|x - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\|^2} \right)$$



(noyau linéaire)

$$f(x) = \text{sgn} \left(\langle x, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle - \langle x, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \right)$$

$$= \text{sgn} \left(\langle x \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \right)$$



5) Changement de variables $\Theta = \alpha, \phi(x_1) + \dots + \alpha_n \phi(x_n)$

$$M_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(1 + e^{-y_i \left(\sum_j \alpha_j \phi(x_j), \phi(x_i) \right)} \right) + \lambda \left\| \sum_j \alpha_j \phi(x_j) \right\|^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(1 + e^{-y_i \sum_j \alpha_j (\phi(x_j), \phi(x_i))} \right) + \lambda \left(\sum_i \alpha_i \phi(x_i), \sum_j \alpha_j \phi(x_j) \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(1 + e^{-y_i (K\alpha)_i} \right) + \lambda \alpha^T K \alpha$$

où $K = \left(K(x_i, x_j) \right)_{i,j}$

6) Il est possible de résoudre le problème par descente de gradient (stochastique).

Il faut être capable de calculer

$$\nabla_{\alpha} (\lambda \alpha^T K \alpha) \text{ et } \nabla_{\alpha} \left(\log \left(1 + e^{-y_i (K\alpha)_i} \right) \right) \forall i$$

ce qui donne

- $\nabla_{\alpha} (\lambda \alpha^T K \alpha) = 2\lambda K \alpha$

- $\nabla_{\alpha} \left(\log \left(1 + e^{-y_i (K\alpha)_i} \right) \right) = \frac{-e^{-y_i (K\alpha)_i}}{1 + e^{-y_i (K\alpha)_i}} y_i \begin{pmatrix} (\phi(x_1), \phi(x_i)) \\ \vdots \\ (\phi(x_n), \phi(x_i)) \end{pmatrix}$